IPEF n.48/49, p.153-156, jan./dez.1995

NOTA TÉCNICA / TECHNICAL NOTE

A PRODUÇÃO DE MADEIRA DE CUSTO MÍNIMO

Frederico Pimentel Gomes[1]
Carlos Henrique Garcia[2]

Numerosos artigos e livros têm buscado recomendar métodos de análise de experimentos de adubação que determinem a dose econômica, isto é, a que forneça receita líquida máxima (PIMENTEL-GOMES; GARCIA, 1990 e PIMENTEL-GOMES; CONAGIN, 1987). No caso florestal, sendo V=f(x) o volume de madeira colhido em estéreos/hectare (st/ha), por exemplo, e x a dose de nutriente ou de mistura fertilizante, em kg/ha, a Receita Líquida (R) correspondente é:

$$R = wf(x) - m - tx,$$

onde w é o preço do estéreo de madeira, m é a despesa fixa do povoamento, por hectare,e t é o preço do quilograma de nutriente ou da mistura fertilizante. O ponto de máximo é a raiz X da equação:

$$\frac{dR}{dx} = wf'(x) - t = 0$$

que torne negativa a derivada segunda f''(x).

Se, em lugar de Receita Líquida máxima, se buscara produtividade máxima, o ponto de máximo será dado pela raiz x_1 da equação $f'(x) = 0$, que torne negativa a derivada segunda $f''(x)$.

No entanto, em alguns casos, um terceiro aspecto seria mais importante: a dose de adubo que permita a produção de madeira de custo mínimo, nas condições do experimento.

O PROBLEMA A RESOLVER

Dado um experimento de adubação com várias doses (3 no mínimo) de um só nutriente ou de uma só mistura fertilizante, o primeiro passo consiste em obter a equação de regressão V= f(x), onde V é o volume de madeira e x é a dose do nutriente ou da mistura. A função f(x) é geralmente um polinômio de segundo grau

$$f(x) = a + bx + cx^2,$$

[1] Professor aposentado do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz da Universidade de São Paulo e consultor técnico do IPEF;
[2] Engenheiro Florestal do Instituto de Pesquisas e Estudos Florestais - IPEF, Caixa Postal 530, 13400-970 - Piracicaba, SP, Brasil.

Admita-se, pois, que a equação de regressão obtida seja:

$V(x) = a + bx + cx^2$,

onde x é a dose do fertilizante, em kg/ha, e V é o volume, que se supõe em st/ha, mas que poderia ser também em m^3/ha, de madeira. Nessa equação, a é a produção sem adubo, logo deve-se ter a > 0. Por outro lado, a derivada

$$\frac{dv}{dx} = V'(x) = b + 2x$$

dá, no ponto x = 0, V'(0) = b. Para que a função seja crescente na origem, deve-se Ter V'(0) > 0, isto é, b > 0. Além disso, tal função só terá máximo se for c < 0. Verifica-se, portanto, que os sinais dos parâmetros a, b, c, são previamente conhecidos nos casos práticos.

Sendo t o preço do quilograma de fertilizante em as despesas fixas do povoamento, em dólares/ha, considerados, tanto para m como para t, os juros relativos ao tempo decorrido da instalação à colheita, a despesa por hectare será

$D = m + tx$

logo, a produção de madeira, em st/dólar, fica:

(1) $$\begin{aligned} F(x) &= (a + bx + cx^2)(m + tx)^{-1} \\ &= t\,(a + bx + cx^2)(f+x)^{-1} \\ &= t^{-1}[cx + (b - cf) + (a - bf + cf^2)(f + X)^{-1}], \end{aligned}$$

onde f = m/t > 0. Deseja-se determinar o nível ótimo de adubação X > 0, que dê a produção máxima de madeira por dólar e, portanto, que dê o preço de custo mínimo da madeira, em dólar/st. Tal dose será o ponto de máximo (se houver) da função:

(2) $$\begin{aligned} G(x) &= (a + bx + cx^2)(f + x)^{-1} \\ &= (cx + (b - cf) + (a - bf + cf^2)(f+X)^{-1}, \end{aligned}$$

cuja derivada é:

$$G'(x) = c - (a - bf + cf^2)(f + x)^{-2}.$$

As raízes da equação

(3) $$G'(x) = c - (a - bf + cf^2)(f+x)^{-2} = 0$$

são os pontos críticos da função G(x), mas só interessa uma solução real $X_0 > 0$. A equação (3) dá:

$$(f + x_0)^2 = \frac{a - bf}{c} + f^2$$

(4)

Sendo $f > 0$, X_0 só poderá ser positivo se tivermos

$$\frac{a - bf}{c} > 0$$

e, como se tem $c < 0$, fica $a - bf < 0$, isto é: $a < bf$.

Em resumo, com $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $f > 0$, haverá um ponto crítico $X_0 > 0$ se se tiver $a < bf$.

Em que condições esse ponto crítico será um ponto de máximo? Uma condição suficiente para isto é que a derivada segunda

$$G''(x) = 2\,(a - bf + cf^2)(f + x)^{-3}$$

seja negativa no ponto $X_0 > 0$ e isto só ocorrerá se se tiver:

(5) $\quad a - bf + cf^2 < 0$

isto é:

(6) $\quad a + cf^2 < bf$

Com $c < 0$ e $a < bf$ esta condição está satisfeita, logo, X_0 será um ponto de máximo. O máximo da função $G(x)$ será o

$$G(x_0) = cx_0 + (b - cf) + (a – bf + cf^2)(f + x_0)^{-1}$$

e o valorda função $F(x)$ será $F(x_0) = (1/t)\,G(x_0)$.

Exemplo: Considere-se a função

$$V(x) = 82 + 0{,}167x - 0{,}000123x,$$

de coeficientes obtidos, por arredondamento, de uma equação volumétrica indicada por PIMENTEL-GOMES ; GARCIA (1990). Tem-se aí $a = 82$, $b = 0{,}167$, $c = -0{,}000123$. Se se tomar $m = 240$ dólares para o custo de implantação (atualizado) por hectare, e se fort $= 0{,}30$ dólar o custo do quilograma da mistura fertilizante, também atualizado, ficará $f = m/t = 800$. Em tais condições, fica: $a = 82$, $bf = 0{,}167 \times 800 = 133{,}6$, logo $a < bf$.

Conclui-se, pois, que há um ponto de máximo $X_0 > 0$, cujo valor se calcula a partir da equação (4). Obtém-se, pois:

a-bf

$$(f + x_0)^2 = \frac{a - bf}{c} + f^2,$$

isto é:

$$(800 + x_0)^2 = \frac{82 - 133{,}6}{-0{,}000123} + (800)^2$$

$$= 1.059.512,$$

portanto:

$$x_0 = \sqrt{1.059.512} - 800 = 229 \text{ kg/ha}$$

O máximo da função:

$$F(x) = \frac{1}{t}[cx + (b - cf) + (a - bf + cf^2)(f + x)^{-1}]$$

é, pois:

$$F(229) = \frac{1}{0{,}30}[-0{,}000123(229) + 0{,}2654 - 130{,}32(800 + 229)^{-1})$$

$$= 0{,}369 \text{ st/dólar}$$

E o custo mínimo é de 1/0,369 = 2,71 dólares/st.

Outro exemplo

Suponha-se agora a equação volumétrica

$V(x) = 110 + 0{,}167x - 0{,}000123x^2$,

com m = 180 dólares/ha, t = 0,30 dólar/kg. Verifica-se, pois, que:

a = 110, b = 0,167, c = -0,000123, f = 600,

$$(f + x_0)^2 = \frac{a - bf}{c} + f^2,$$

logo,

$$(600 + x_0)^2 = \frac{110 - (0{,}167)(600)}{-0{,}000123} + (600)^2,$$

$$= 280.325,$$

$$600 + x_0 = 529{,}5,$$
$$X_0 = -70{,}5 \text{ kg/ha}.$$

A solução negativa indica, evidentemente, que não convém adubar. O custo mínimo sedaria para, $X_0 = 0$ e seria de 180/110 = 1,64 dólar/st.

Note-se que neste caso não está satisfeita a condição suficiente de raiz $X > 0$, pois $a = 110 > bf = 100{,}2$, e não $a < bf$, como deveria ser.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

PIMENTEL-GOMES, F.; A. CONAGIN, A. - **Experimentos de adubação**: planejamento e análise estatística. Londrina, Universidade Estadual, 1987. 102 p.

PIMENTEL-GOMES, F.; GARCIA, C.H. – A interpretação econômica de um ensaio de adubação de **E. grandis**. In: CONGRESSO FLORESTAL BRASILEIRO, 6, Campos do Jordão, 1990. **Anais**. São Paulo, SBS/SBEF, 1990. v.3, p. 52-5.

Trabalho recebido = 05/03/1994
Trabalho aceito = 09/12/1994