

ARTIGO ORIGINAL

Equações de Preussner para a estimativa do volume de árvores de acácia-negra e estoque energético para os componentes toco e ponteira

Preussner equations to estimate the volume of black wattle trees and energy stock for the stump and tips components

Sérgio Costa Junior¹ , Sylvio Péllico Netto¹ , Alexandre Behling¹ 

¹Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba, PR, Brasil

Como citar: Costa Junior, S., Péllico Netto, S., & Behling, A. (2022). Equações de Preussner para a estimativa do volume de árvores de acácia-negra e estoque energético para os componentes toco e ponteira. *Scientia Forestalis*, 50, e3869. <https://doi.org/10.18671/scifor.v50.36>

Resumo

Diferentes modelos, dos mais simples aos mais complexos, são utilizados para estimar o volume total e ou de parte do fuste. Em sua grande maioria, as equações utilizadas para modelar a forma da árvore são ajustadas por meio da técnica de análise de regressão, o que implica em atender a condicionantes como a não autocorrelação dos resíduos. Uma alternativa a esta técnica e o ajuste das equações proposta por Preussner, que permite obter o volume de madeira por integração de várias equações. A flexibilidade desta técnica permite que as equações possam ser modificadas de acordo com cada necessidade. Uma vez ajustadas as equações de Preussner, elas poderão ser utilizadas para estimar o volume das secções correspondentes e consequentemente, a biomassa e o estoque energético quando combinado com outras variáveis. Dessa forma, o trabalho teve dois objetivos principais: i - aplicar o modelo de afilamento proposto por Preussner, ii - estimar o volume, a biomassa e o estoque energético dos componentes do fuste toco e ponteira em povoamentos de acácia-negra. As equações foram ajustadas para 670 árvores de acácia-negra com idades variando de 1 a 10 anos, cultivadas no estado do Rio Grande do Sul, Brasil. O modelo proposto por Preussner resultou em bom ajuste, assemelhando-se às técnicas avançadas de inteligência artificial e a modelos tradicionais. A melhoria do ajuste com o aumento da idade dos povoamentos foi constatada. Na aplicação do modelo foram calculados os volumes de toco para diferentes alturas. Com altura de corte próxima de 20 centímetros do solo, o volume do toco se aproxima do volume da ponteira (porção acima de 75% da altura da árvore). Para alturas próximas de 25 centímetros, o volume do toco passa a ser maior que o obtido na ponteira. Os estoques energéticos para um toco com 20 a 25 centímetros correspondem ao mesmo da ponteira, entorno de 22 Gcal.ha⁻¹. Em simulação das árvores que são colhidas a uma altura de 20 a 25 centímetros do solo, o volume de biomassa que está sendo deixado no sítio pode ser maior que o volume da seção superior da árvore (75 a 100%). Em termos percentuais médios, a ponteira e o toco cortado a 25 cm representam aproximadamente 8% do estoque energético por ha, que será deixado em campo.

Palavras-chave: *Acacia mearnsii*; Modelos de afilamento; Resíduos florestais.

Abstract

Different models, from the simplest to the most complex, are used to estimate the total or partial volume of the stem. Most of the equations used to model the shape of the tree are adjusted through regression analysis technique, which implies accomplishing the conditions as non-autocorrelation of residues. An alternative to this technique is the adjustment of the equations proposed by Preussner, which allow to

Fonte de financiamento: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES – Código de financiamento 001).

Conflito de interesse: Nada a declarar.

Autor correspondente: o.sergio.costa@gmail.com

Recebido: 23 março 2022.

Aceito: 8 agosto 2022.

Editor: Mauro Valdir Schumacher.



Este é um artigo publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Attribution, que permite uso, distribuição e reprodução em qualquer meio, sem restrições desde que o artigo científico seja corretamente citado.

obtain the volume of wood by integrating several equations. The flexibility of this technique allows the equations to be modified according to each need, that is, the intervals each equation represents can be modified. Once the Preussner equations are adjusted, they can be used to estimate the volume of the corresponding sections and, consequently, the biomass and energy stock when combined with other variables. Thus, the work had two main objectives: i - to apply the tapering model proposed by Preussner, ii - to estimate the volume, biomass and energy stock of the stump and tip stem components in black wattle stands. The equations were fitted for 670 black wattle trees in ages ranging from 1 to 10 years old, cultivated in the state of Rio Grande do Sul, Brazil. The model proposed by Preussner resulted in a good fit, resembling advanced artificial intelligence techniques and traditional models. The improvement of the fit with the increase of the age of the stands was observed. In the application of the model, the stump volumes for different heights were calculated. With a height of cut close to 20 centimeters from the ground, the volume of the stump is close to the volume of the tip (portion above 75% of the height of the tree). For heights close to 25 centimeters, the volume of the stump becomes greater than that obtained from the tip. The energy stocks for a 20 to 25 cm stump correspond to the same for the tip, around 22 Gcal.ha⁻¹. Simulating trees harvested at a height of 20 to 25 centimeters from the ground, the volume of biomass being left in the site may be greater than the volume of the upper section of the tree (75 to 100%). In average percentages, the tip and the stump cut at 25 cm represent approximately 8% of the energy stock per ha, which will be left in the field.

Keywords: *Acacia mearnsii*; Tapering models; Forest waste.

INTRODUÇÃO

Diâmetro, altura e volume são algumas das variáveis com mais demandas em inventários florestais. As duas primeiras podem ser obtidas mais facilmente com o uso de equipamentos apropriados, já a obtenção do volume é mais cara e demorada. De acordo com Ahrens & Holbert (1981), uma função de afilamento é uma descrição matemática do perfil longitudinal de um tronco, assim, em termos geométricos, o tronco é tratado como um sólido de revolução e seu volume pode ser obtido por integração dessa função. Deste modo, utilizar técnicas matemáticas que comparam a forma da árvore a sólidos geométricos como meio para estimar o volume é uma alternativa.

Diferentes modelos matemáticos foram desenvolvidos para descrever a forma ao longo do fuste de uma árvore e são denominados modelos de afilamento. Em grande parte dos casos, são modelos ajustados por meio de técnicas de análise de regressão, portanto é imprescindível que os resíduos não sejam autocorrelacionados. Caso esta condição não seja considerada, os testes de hipótese na análise de regressão podem ser afetados. Nesse contexto, métodos independentes do estimador por regressão são uma alternativa para facilitar a modelagem da forma da árvore em casos quando há autocorrelação entre os resíduos (Stefanello et al., 2021).

Na literatura existem diversos modelos, desde os mais simples aos mais complexos. De acordo com Souza et al. (2016) pode haver dificuldades em encontrar uma função capaz de estimar com acurácia os diâmetros ao longo do fuste, assim, modelos matemáticos de maior complexidade, como o segmentado, podem gerar melhores resultados (Max & Burkhart, 1976). Modelos de maior flexibilidade, em alguns casos, possibilitam maior acurácia ao utilizar duas ou mais funções para representar o perfil da árvore, aumentando, porém, a complexidade do modelo (Assis, 2000).

Nesse contexto, o modelo proposto Preussner (1974) é uma opção a ser considerada, uma vez que, segundo Souza et al. (2016), modelos matematicamente menos complexos podem aliar eficiência à simplicidade de aplicação. Preussner (1974) desenvolveu a aplicação de curvas de forma, cujo método consiste em subdividi-la em quatro partes distintas, equacionadas, cada uma delas, com uma parábola e apresentando vantagens em relação a outros métodos, conforme elucidado no trabalho publicado por Péllico Netto (1994), utilizando árvores de *Araucaria angustifolia* (Bertol.) Kuntze.

Stefanello et al. (2021), tratando-se de modelos segmentados apresentaram as mais importantes contribuições até o presente momento publicados (Demaerschalk & Kozak, 1977; Max & Burkhart, 1976; Cao et al., 1980; Trincado & Burkhart, 2006; Scotti et al., 2014; Li et al., 2012). Estes autores ajustaram vários modelos de afilamento e os compararam com o modelo

de Preussner (1974) para povoamentos de *Pinus taeda* L. e concluíram que, em termos de volume total, as funções testadas de Kozak e Preussner forneceram estimativas confiáveis. Ainda, mencionam que existe vantagem do procedimento proposto por Preussner devido à flexibilidade das funções de afilamento ajustadas, a simplicidade dos cálculos de volume por integração e a viabilidade de interpretar seus coeficientes.

O fracionamento do fuste, usando as funções de Preussner, permite obter o volume de madeira por integração em intervalos que podem ser modificados de acordo com cada necessidade. Estas funções podem ser utilizadas para a obtenção de diâmetros ao longo do fuste, a altura em um determinado diâmetro, volume total e por secções. O modelo de Preussner é baseado na utilização de quatro modelos segmentados simples, com expoentes variando de 0 a 1. Quando mais próximo de 1 for o valor do expoente melhor é a forma da árvore, ou seja, o perfil da árvore se aproxima de uma reta (Péllico Netto, 1994).

Conhecendo o diâmetro, a altura e o fator de forma dado pelo ajuste da função de Preussner, o volume total pode ser calculado de forma rápida e fácil. O volume de partes do fuste também pode ser obtido utilizando o fator de forma referente a cada secção. Outra vantagem da função é que a soma dos volumes calculados de cada secção é compatível com o volume total do fuste da árvore, o que garante a aditividade.

Além das aplicações para obter volume total, comercial, sortimentos da floresta, entre outras, essas equações também permitem obter o volume de madeira que ficará no campo (toco), especificada a altura de corte adotada, bem como obter quanto de material da ponteira ficará no campo, especificado o diâmetro mínimo de corte, os quais poderão ser aproveitados principalmente para produção de energia. Ambas são avaliações importantes, visto que o material deixado em campo engloba um estoque de energia que pode estar sendo descartado.

Desta forma, esta pesquisa teve dois objetivos principais: i - aplicar o modelo de afilamento proposto por Preussner, ii estimar o volume, a biomassa e o estoque energético dos componentes do fuste toco e ponteira em povoamentos de acácia-negra.

MATERIAL E MÉTODOS

Árvores de acácia-negra (*Acacia mearnsii* De Wild.) foram mensuradas para a elaboração do presente estudo, provenientes de plantios comerciais no estado do Rio Grande do Sul, Brasil. Ao todo, foram amostrados 12 povoamentos classificados quanto ao estágio de desenvolvimento, aos quais atribuiu-se idades qualitativas, ou seja, povoamentos com até 2 anos foram considerados jovens, entre 2 e 4 anos em idade média inicial, entre 4 e 6 anos em idade média avançada e maiores que 6 anos em idade madura. Cada idade compõe-se de um conjunto de árvores, havendo ainda um conjunto denominado de geral, no qual estão incluídas as árvores de todas as idades.

Os plantios foram efetuados com mudas produzidas a partir de sementes oriundas de pomares de sementes da empresa TANAGRO S.A. Cada muda recebeu 50 gramas de adubo NPK (5-30-15). O espaçamento adotado foi de 3 m entre linhas e 1,75 m entre plantas na linha. Todos os povoamentos foram submetidos às mesmas condições de manejo, tendo sido efetuada apenas a roçada mecânica das plantas daninhas com uso de trator e roçadeira agrícolas durante os dois primeiros anos após o plantio.

Origem dos dados

A pesquisa a campo, conduzida durante os meses de junho e julho de 2014, consistiu em instalar um experimento com 48 unidades amostrais, sendo 12 em cada idade, sendo estas com forma circular, cuja área é de 78,54 m², alocadas de forma aleatória, nas quais foram mensuradas as variáveis biométricas em cada árvore. Ao todo, foram avaliadas 670 árvores, sendo 185 na idade jovem, 163 na média inicial, 153 na média avançada e 170 na madura.

Todas as árvores foram derrubadas e tomadas as medidas da circunferência à altura do peito, altura total e demais circunferências no tronco nas posições de 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 e 95% da altura total. Os diâmetros foram obtidos ao longo do fuste, visando manter

as condições descritas por Preussner, para a obtenção de quocientes de forma em função do diâmetro tomado na metade do fuste ($d_{0,5h}$), conforme proposto por Hohenald (1924).

Obtenção das estimativas de biomassa para o toco e ponteira por secção

Os tocos e as ponteiras, geralmente, não são aproveitados. Entretanto, constituem uma fração da biomassa que pode ser considerada para uso com fins energéticos. Nesse sentido, foram calculadas as variáveis biomassa e estoque energético para as secções correspondentes ao toco e ponteira.

O volume médio dos tocos para cada árvore, consequentemente por parcela, foi calculado simulando alturas de corte de 5, 10, 15, 20, 25 centímetros. O volume da ponteira da árvore foi calculado considerando o volume remanescente acima de 75% da altura da árvore.

Uma vez ajustadas as funções de Preussner foi possível calcular o volume de uma determinada secção do fuste ($\hat{v}_i$ estimado). Por sua vez, a biomassa de uma determinada secção foi estimada por meio da expressão:

$$\hat{b}_{ij} = \hat{v}_{ij} * \text{densidade } i$$

Em que: o $\hat{b}_{ij}$ é a biomassa estimada de uma determinada secção i para a árvore j , $\hat{v}_{ij}$ é o volume estimado pelas funções de Preussner para a secção i para a árvore j , e densidade é a densidade básica da madeira medida para a árvore j .

Para obter a densidade básica do fuste foram retirados cinco discos de 2 cm de espessura nas posições: 0%, 25%, 50%, 75% e 95% em relação à altura total da árvore. A densidade básica foi obtida de acordo com a norma técnica ASTM D2395 (American Society for Testing Materials, 2014).

Obtenção das estimativas do estoque energético para o toco e ponteira por secção

O estoque energético da ponteira e do toco foi obtido por meio da expressão:

$$\hat{E}_{ij} = \hat{b}_{ij} * PCS_j$$

Em que: $\hat{E}_{ij}$ é o estoque energético para a secção i (toco ou ponteira) para a árvore j , $\hat{b}_{ij}$ é a biomassa estimada de uma determinada secção i (toco ou ponteira) para a árvore j , PCS_j é o poder calorífico superior medido para a árvore j .

Para a obtenção do poder calorífico superior foram tomadas amostras, nas mesmas posições utilizadas para densidade básica, das árvores derrubadas. O poder calorífico superior foi determinado seguindo os procedimentos estabelecidos na norma técnica ASTM D5865 (American Society for Testing Materials, 2013).

Uma vez obtido o volume, a biomassa e o estoque energético para as secções do toco e ponteira e total do fuste foram calculados os percentuais dos componentes das secções em relação ao total.

Ajuste da curva de forma de Preussner

O fracionamento do fuste sugerido por Preussner foi modificado ligeiramente pelos autores, ou seja, o primeiro segmento variando entre 0 e 25% do fuste, o segundo segmento variando de 25 e 50%, o terceiro segmento de 50 e 75% e o último entre 75 e 100%. Tais divisões coincidem com as necessidades de estimativas de volumes, uma vez que a madeira das primeiras torras são as de maior valor. Deste modo, foram ajustadas as seguintes funções para a obtenção de uma única curva contínua de forma, que une os sucessivos extremos dos quocientes, ou seja:

$$y = a_{11} \cdot d_{0,5h} \frac{1}{\sqrt[w]{1+b \cdot x}} \text{ para } 0,0 < x \leq 0,25$$

$$y = a_{21} \cdot d_{0,5h} \sqrt[w]{1-x} \text{ para } 0,25 < x \leq 0,50 \quad (1)$$

$$y = a_{31} \cdot d_{0,5h} \sqrt[w]{1-x} \text{ para } 0,50 < x \leq 0,75 \quad y = a_{41} \cdot d_{0,5h} \sqrt[w]{1-x} \text{ para } 0,75 < x \leq 1,0$$

Em que: y é o diâmetro na posição x ; $d_{0,5h}$ é o diâmetro no meio do fuste; x é o comprimento relativo do fuste, ou seja, $x = \frac{h_x}{h}$, dado que " x " tem existência no intervalo real entre 0,0 e 1,0, portanto, $\frac{0}{h} \leq x \leq \frac{h_x}{h}$; h é a altura total da árvore; w é a potência da expressão, sendo igual a um para a obtenção de uma reta e menor que um para obtenção de uma parábola clássica, ou seja, à medida que se se aproxima de zero tem-se uma curva mais côncava e ao se aproximar de um tem-se uma curva mais suave, em que b é o acelerador da parábola.

Avaliação da curva de forma de Preussner

A qualidade das funções propostas por Preussner foram avaliadas por meio do coeficiente de correlação de Pearson (r) entre os valores observados e estimados (Equação 2), raiz quadrada do erro médio (RSME%) em percentagem (Equação 3), e coeficiente de variação (CV) em percentagem (Equação 4).

$$r = \frac{\text{Cov}(y_i, \hat{y}_i)}{\sqrt{\text{Var}(y_i) \cdot \text{Var}(\hat{y}_i)}} \quad (2)$$

$$RSME\% = \frac{100}{\bar{y}_{real}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}} \quad (3)$$

$$CV\% = \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100 \quad (4)$$

Em que: r é o coeficiente de correlação de Pearson; $\text{Cov}(y_i, \hat{y}_i)$ é a covariância entre os valores observados e preditos; $\text{Var}(y_i)$ e $\text{Var}(\hat{y}_i)$ são as variâncias dos valores observados e preditos, respectivamente. $RSME\%$ é a raiz quadrada do erro médio; $\bar{y}_{real}$ é a média dos valores observados; y_i é o valor observado na i -ésima árvore; $\hat{y}_i$ é o valor estimado para a i -ésima árvore e n é o número de observações. $CV\%$ é o coeficiente de variação em percentagem, s_x é o desvio padrão amostral e $\bar{x}$ é a média dos valores observados.

Aplicação da curva de forma de Preussner

As funções propostas por Preussner podem ser utilizadas para diversos fins, tais como: determinar o comprimento da tora para um dado diâmetro no topo, o diâmetro da tora para uma dada altura, o volume total do fuste, ou em um determinado intervalo deste. Entretanto, em função do objetivo do presente trabalho será somente apresentado o cálculo do volume, que no presente caso, pode ser obtido pela integração das funções.

Considerando que o toco faz parte da primeira secção da árvore foi utilizada apenas a primeira parte da função para estimar o seu volume, enquanto para a ponteira da árvore, que faz parte da quarta secção, somente esta foi utilizada para estimar o seu volume.

O volume médio dos tocos por parcela foi calculado simulando alturas de corte de 5, 10, 15, 20, 25 centímetros. O volume da ponteira da árvore foi calculado considerando o volume remanescente acima de 75% da altura da árvore. Considerando a área de cada parcela foi possível extrapolar os volumes calculados por hectare. Para avaliar o quanto representa o volume de madeira do toco e da ponteira, foram calculados os respectivos percentuais

relativos ao volume total. Considerando que, tanto o volume do toco como o de ponteira possam ser utilizados para a geração de energia, foi calculado o estoque energético presente nesses componentes das árvores.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Curva de forma em partes, em função do diâmetro $d_{0,5h}$ proposto por Preussner

O desenvolvimento das funções para os quatro segmentos em que o fuste foi seccionado e resultou nos sistemas de equações 5 a 9.

$$\text{Geral} \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,6386 \frac{1}{(1 + 4,3108x)^{0,2956}} \\ 2^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,5243 (1 - x)^{0,6082} \\ 3^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,5761 (1 - x)^{0,6563} \\ 4^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,9609 (1 - x)^{0,8139} \end{array} \right. \text{Para} \left\{ \begin{array}{l} 0,0 < x \leq 0,25 \\ 0,25 < x \leq 0,50 \\ 0,50 < x \leq 0,75 \\ 0,75 < x \leq 1,0 \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\text{Jovem} \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,8127 \frac{1}{(1 + 3,8379x)^{0,3647}} \\ 2^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,6378 (1 - x)^{0,7117} \\ 3^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,7184 (1 - x)^{0,7811} \\ 4^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,6632 (1 - x)^{0,7575} \end{array} \right. \text{Para} \left\{ \begin{array}{l} 0,0 < x \leq 0,25 \\ 0,25 < x \leq 0,50 \\ 0,50 < x \leq 0,75 \\ 0,75 < x \leq 1,0 \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\text{Média Inicial} \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,5843 \frac{1}{(1 + 8,0400x)^{0,1742}} \\ 2^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,5098 (1 - x)^{0,5944} \\ 3^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,5656 (1 - x)^{0,6467} \\ 4^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,9232 (1 - x)^{0,7951} \end{array} \right. \text{Para} \left\{ \begin{array}{l} 0,0 < x \leq 0,25 \\ 0,25 < x \leq 0,50 \\ 0,50 < x \leq 0,75 \\ 0,75 < x \leq 1,0 \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\text{Média Avançada} \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,5701 \frac{1}{(1 + 3,2744x)^{0,3379}} \\ 2^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,4812 (1 - x)^{0,5668} \\ 3^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,5637 (1 - x)^{0,6449} \\ 4^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 2,0974 (1 - x)^{0,8568} \end{array} \right. \text{Para} \left\{ \begin{array}{l} 0,0 < x \leq 0,25 \\ 0,25 < x \leq 0,50 \\ 0,50 < x \leq 0,75 \\ 0,75 < x \leq 1,0 \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\text{Madura} \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,5624 \frac{1}{(1 + 3,3622x)^{0,3494}} \\ 2^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,4577 (1 - x)^{0,5437} \\ 3^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,4629 (1 - x)^{0,5488} \\ 4^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 2,2779 (1 - x)^{0,8522} \end{array} \right. \text{Para} \left\{ \begin{array}{l} 0,0 < x \leq 0,25 \\ 0,25 < x \leq 0,50 \\ 0,50 < x \leq 0,75 \\ 0,75 < x \leq 1,0 \end{array} \right. \quad (9)$$

Os resultados obtidos através dos quocientes estimados para o sistema de equações (Equações 5 a 9 – Figura 1) foram comparados com os resultados obtidos por meio dos quocientes de forma calculados e com os resultados obtidos para o sistema de equações geral (Equação 5). Quando calculado o erro percentual em cada ponto de referência, nos quais foram tomados os quocientes de forma, os resultados ora foram positivos, ora foram negativos e mantiveram-se inferiores a 9%. Quando comparado os resultados obtidos pelas

funções gerais com os calculados para cada classe de idade, o erro percentual em todos os casos foi inferior a 16%. Isto evidencia que quando a função é ajustada por classe de idade há uma melhoria nas estimativas, principalmente na primeira secção da árvore.

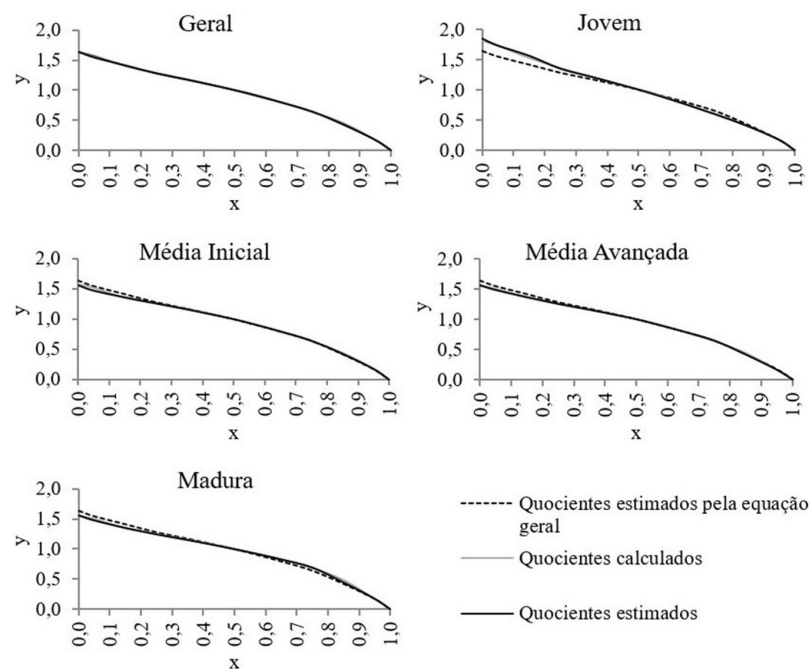


Figura 1. Perfil das árvores de acácia-negra nas idades jovem, média inicial, média avançada, madura e geral.

A solução da variável “x” em função de “y” pode ser facilmente obtida. As transformações operativas para obtenção da altura em um dado diâmetro e tomadas em função do diâmetro à altura do peito estão sumarizadas nas equações 10 a 14.

Geral

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a_{12} \frac{1}{\left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{3,3833}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - a_{22} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,6442} \\ x = 1 - a_{32} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,5236} \\ x = 1 - a_{42} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,2286} \end{array} \right. \text{ Para } \left\{ \begin{array}{l} 1,2797 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,6386 \\ 1,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,2797 \\ 0,6345 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,0000 \\ 0,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 0,6345 \end{array} \right. \quad (10)$$

Jovem

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a_{12} \frac{1}{\left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{2,7423}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - a_{22} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,4050} \\ x = 1 - a_{32} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,2803} \\ x = 1 - a_{42} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,3201} \end{array} \right. \text{ Para } \left\{ \begin{array}{l} 1,3345 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,8127 \\ 1,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,3345 \\ 0,5819 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,0000 \\ 0,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 0,5819 \end{array} \right. \quad (11)$$

Média Inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a_{12} \frac{1}{\left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{5,7393}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - a_{22} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,6825} \\ x = 1 - a_{32} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,5462} \\ x = 1 - a_{42} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,2577} \end{array} \right. \text{Para} \left\{ \begin{array}{l} 1,2725 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,5843 \\ 1,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,2725 \\ 0,6387 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,0000 \\ 0,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 0,6387 \end{array} \right. \quad (12)$$

Média Avançada

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a_{12} \frac{1}{\left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{2,9593}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - a_{22} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,7643} \\ x = 1 - a_{32} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,5505} \\ x = 1 - a_{42} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,1672} \end{array} \right. \text{Para} \left\{ \begin{array}{l} 1,2584 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,5701 \\ 1,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,2584 \\ 0,6395 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,0000 \\ 0,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 0,6395 \end{array} \right. \quad (13)$$

Madura

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a_{12} \frac{1}{\left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{2,8619}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - a_{22} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,8391} \\ x = 1 - a_{32} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,8222} \\ x = 1 - a_{42} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,1734} \end{array} \right. \text{Para} \left\{ \begin{array}{l} 1,2467 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,5624 \\ 1,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,2467 \\ 0,6836 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,0000 \\ 0,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 0,6836 \end{array} \right. \quad (14)$$

As constantes transformadas estão apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1. Constantes transformadas.

Geral				
$a_{12} = \frac{a_{11}^{3,3833}}{b} = 1,2334$	$a_{22} = \frac{1}{a_{21}^{1,6442}} = 0,5000$	$a_{32} = \frac{1}{a_{31}^{1,5236}} = 0,5000$	$a_{42} = \frac{1}{a_{41}^{1,2286}} = 0,4372$	
Jovem				
$a_{12} = \frac{a_{11}^{2,7423}}{b} = 1,3313$	$a_{22} = \frac{1}{a_{21}^{1,4050}} = 0,5000$	$a_{32} = \frac{1}{a_{31}^{1,2803}} = 0,5000$	$a_{42} = \frac{1}{a_{41}^{1,2286}} = 0,4372$	
Média Inicial				
$a_{12} = \frac{a_{11}^{5,7393}}{b} = 1,7445$	$a_{22} = \frac{1}{a_{21}^{1,6825}} = 0,5000$	$a_{32} = \frac{1}{a_{31}^{1,5462}} = 0,5000$	$a_{42} = \frac{1}{a_{41}^{1,2577}} = 0,4393$	
Média Avançada				
$a_{12} = \frac{a_{11}^{2,9593}}{b} = 1,1605$	$a_{22} = \frac{1}{a_{21}^{1,7643}} = 0,5000$	$a_{32} = \frac{1}{a_{31}^{1,5505}} = 0,5000$	$a_{42} = \frac{1}{a_{41}^{1,1672}} = 0,4213$	
Madura				
$a_{12} = \frac{a_{11}^{2,8619}}{b} = 1,0665$	$a_{22} = \frac{1}{a_{21}^{1,8391}} = 0,5000$	$a_{32} = \frac{1}{a_{31}^{1,8222}} = 0,5000$	$a_{42} = \frac{1}{a_{41}^{1,1734}} = 0,3907$	

Com as equações resultantes (Equações 10 a 14) é possível calcular a posição relativa “x” no fuste para um dado diâmetro “y”. Para a escolha da equação a ser usada deve-se antes calcular o valor de $\frac{y}{d_{0,5h}}$ para o dado diâmetro escolhido “y”.

A curva de forma em função do diâmetro à altura do peito

A mensuração do diâmetro na posição correspondente à metade da altura ($d_{0,5h}$) é facilmente obtida se a árvore for derrubada, entretanto, abater árvores é uma atividade cara e demorada. Assim, a mensuração do $d_{0,5h}$ pode dificultar a condução do inventário florestal. Uma alternativa prática é o uso de curvas de forma em função do diâmetro à altura do peito ($d_{1,3}$). A conversão das funções para o diâmetro à altura do peito será efetuada em função da altura da árvore. Assim, é necessário verificar o comprimento relativo para o diâmetro à altura do peito por meio da relação $x = \frac{1,3}{h}$ para selecionar a equação a ser utilizada.

Se a árvore tiver altura maior que 5,2 m o $d_{1,3}$ estará no primeiro segmento, se maior que 2,6 até 5,2 m o $d_{1,3}$ estará no segundo segmento, se entre 1,73 e 2,6 m no terceiro segmento e se tiver altura até 1,73 m estará no quarto segmento. Desta maneira, deverá ser utilizada a equação do segmento apropriado em que se encontra o $d_{1,3}$ (Tabela 2).

Tabela 2: Equações para as curvas de forma em função do diâmetro à altura do peito.

	$h > 5,2$	$2,6 < h \leq 5,2$
Geral	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\left(1 + 4,3108 \frac{1,3}{h}\right)^{0,2956}}{a_{11}}$	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,6082}}}{a_{21}}$
Jovem	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\left(1 + 3,8379 \frac{1,3}{h}\right)^{0,3647}}{a_{11}}$	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,7117}}}{a_{21}}$
Média Inicial	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\left(1 + 8,0400 \frac{1,3}{h}\right)^{0,1742}}{a_{11}}$	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,5944}}}{a_{21}}$
Média Avançada	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\left(1 + 3,2744 \frac{1,3}{h}\right)^{0,3379}}{a_{11}}$	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,5668}}}{a_{21}}$
Madura	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\left(1 + 3,3622 \frac{1,3}{h}\right)^{0,3494}}{a_{11}}$	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,5437}}}{a_{21}}$
	$1,73 < h \leq 2,6$	$h \leq 1,73$
Geral	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,6563}}}{a_{31}}$	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,8139}}}{a_{41}}$
Jovem	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,7811}}}{a_{31}}$	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,7575}}}{a_{41}}$
Média Inicial	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,6467}}}{a_{31}}$	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,7951}}}{a_{41}}$
Média Avançada	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,6449}}}{a_{31}}$	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,8568}}}{a_{41}}$
Madura	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,5488}}}{a_{31}}$	$d_{0,5h} = d_{1,3} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,8522}}}{a_{41}}$

Em que: $d_{0,5h}$ é o diâmetro no meio do fuste; $d_{1,3}$ é o diâmetro à altura do peito h é a altura total da árvore.

Uma vez conhecidos os diâmetros e altura de uma determinada árvore $d_{1,3}$ e a altura total (h), então as equações da Tabela 2 podem ser consideradas como constante k (Tabela 3).

Tabela 3: Constantes k .

$h > 5,2$	$2,6 < h \leq 5,2$	$1,73 < h \leq 2,6$	$h \leq 1,73$
Geral			
$k = d_{1,3} \left(1 + 4,3108 \frac{1,3}{h}\right)^{0,2956}$	$k = d_{1,3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,6082}}$	$k = d_{1,3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,6563}}$	$k = d_{1,3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,8139}}$
Jovem			
$k = d_{1,3} \left(1 + 3,8379 \frac{1,3}{h}\right)^{0,3647}$	$k = d_{1,3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,7117}}$	$k = d_{1,3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,7811}}$	$k = d_{1,3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,7575}}$
Média Inicial			
$k = d_{1,3} \left(1 + 8,0400 \frac{1,3}{h}\right)^{0,1742}$	$k = d_{1,3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,5944}}$	$k = d_{1,3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,6467}}$	$k = d_{1,3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,7951}}$
Média Avançada			
$k = d_{1,3} \left(1 + 3,2744 \frac{1,3}{h}\right)^{0,3379}$	$k = d_{1,3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,5668}}$	$k = d_{1,3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,6449}}$	$k = d_{1,3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,8568}}$
Madura			
$k = d_{1,3} \left(1 + 3,3622 \frac{1,3}{h}\right)^{0,3494}$	$k = d_{1,3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,5437}}$	$k = d_{1,3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,5488}}$	$k = d_{1,3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,8522}}$

Em que: k é constante; $d_{1,3}$ é o diâmetro à altura do peito h é a altura total da árvore.

A altura da árvore deverá ser utilizada em metros. Consequentemente, facilita a obtenção do diâmetro $d_{0,5h}$ em função de $d_{1,3}$, portanto:

$$d_{0,5h} = \frac{k}{a_{21}} \quad (15)$$

Por substituição de (15) em (5 até 9) obtém-se as equações 16 a 20.

$$\text{Geral} \begin{cases} 1^\circ y = a_{13} k \frac{1}{(1 + 3,8379x)^{0,3647}} \\ 2^\circ y = k (1 - x)^{0,7117} \\ 3^\circ y = a_{33} k (1 - x)^{0,7811} \\ 4^\circ y = a_{43} k (1 - x)^{0,7575} \end{cases} \text{ Para } \begin{cases} 0,0 < x \leq 0,25 \\ 0,25 < x \leq 0,50 \\ 0,50 < x \leq 0,75 \\ 0,75 < x \leq 1,0 \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{Jovem} \begin{cases} 1^\circ y = a_{13} k \frac{1}{(1 + 3,8379x)^{0,3647}} \\ 2^\circ y = k (1 - x)^{0,7117} \\ 3^\circ y = a_{33} k (1 - x)^{0,7811} \\ 4^\circ y = a_{43} k (1 - x)^{0,7575} \end{cases} \text{ Para } \begin{cases} 0,0 < x \leq 0,25 \\ 0,25 < x \leq 0,50 \\ 0,50 < x \leq 0,75 \\ 0,75 < x \leq 1,0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{Média Inicial} \begin{cases} 1^\circ y = a_{13} k \frac{1}{(1 + 8,0400x)^{0,1742}} \\ 2^\circ y = k (1 - x)^{0,5944} \\ 3^\circ y = a_{33} k (1 - x)^{0,6467} \\ 4^\circ y = a_{43} k (1 - x)^{0,7951} \end{cases} \text{ Para } \begin{cases} 0,0 < x \leq 0,25 \\ 0,25 < x \leq 0,50 \\ 0,50 < x \leq 0,75 \\ 0,75 < x \leq 1,0 \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{Média Avançada} \begin{cases} 1^\circ y = a_{13} k \frac{1}{(1+3,2744x)^{0,3379}} \\ 2^\circ y = k (1-x)^{0,5668} \\ 3^\circ y = a_{33} k (1-x)^{0,6449} \\ 4^\circ y = a_{43} k (1-x)^{0,8568} \end{cases} \text{ Para } \begin{cases} 0,0 < x \leq 0,25 \\ 0,25 < x \leq 0,50 \\ 0,50 < x \leq 0,75 \\ 0,75 < x \leq 1,0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{Madura} \begin{cases} 1^\circ y = a_{13} k \frac{1}{(1+3,3622x)^{0,3494}} \\ 2^\circ y = k (1-x)^{0,5437} \\ 3^\circ y = a_{33} k (1-x)^{0,5488} \\ 4^\circ y = a_{43} k (1-x)^{0,8522} \end{cases} \text{ Para } \begin{cases} 0,0 < x \leq 0,25 \\ 0,25 < x \leq 0,50 \\ 0,50 < x \leq 0,75 \\ 0,75 < x \leq 1,0 \end{cases} \quad (20)$$

As constantes resultantes das equações 16 a 20 estão apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4. Constantes resultantes das equações 16 a 20.

Geral	$a_{13} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = 1,0750$	$a_{33} = \frac{a_{31}}{a_{21}} = 1,0339$	$a_{43} = \frac{a_{41}}{a_{21}} = 1,2864$
Jovem	$a_{13} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = 1,1068$	$a_{33} = \frac{a_{31}}{a_{21}} = 1,0492$	$a_{43} = \frac{a_{41}}{a_{21}} = 1,0155$
Média Inicial	$a_{13} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = 1,0493$	$a_{33} = \frac{a_{31}}{a_{21}} = 1,0370$	$a_{43} = \frac{a_{41}}{a_{21}} = 1,2738$
Média Avançada	$a_{13} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = 1,0600$	$a_{33} = \frac{a_{31}}{a_{21}} = 1,0557$	$a_{43} = \frac{a_{41}}{a_{21}} = 1,4160$
Madura	$a_{13} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = 1,0718$	$a_{33} = \frac{a_{31}}{a_{21}} = 1,0035$	$a_{43} = \frac{a_{41}}{a_{21}} = 1,5283$

Para a obtenção das alturas em um dado diâmetro, as equações 21 a 25 podem igualmente ser resolvidas.

$$\text{Geral} \begin{cases} x = a_{14} \frac{1}{\left(\frac{y}{k}\right)^{3,3833}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - \left(\frac{y}{k}\right)^{1,6442} \\ x = 1 - a_{34} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,5236} \\ x = 1 - a_{44} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,2286} \end{cases} \text{ Para } \begin{cases} 0,8395 \leq \frac{y}{k} \leq 1,0750 \\ 0,6560 \leq \frac{y}{k} \leq 0,8395 \\ 0,4162 \leq \frac{y}{k} \leq 0,6560 \\ 0,0000 \leq \frac{y}{k} \leq 0,4162 \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{Jovem} \begin{cases} x = a_{14} \frac{1}{\left(\frac{y}{k}\right)^{2,7423}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - \left(\frac{y}{k}\right)^{1,4050} \\ x = 1 - a_{34} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,2803} \\ x = 1 - a_{44} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,3201} \end{cases} \text{ Para } \begin{cases} 0,8148 \leq \frac{y}{k} \leq 1,1068 \\ 0,6106 \leq \frac{y}{k} \leq 0,8148 \\ 0,3553 \leq \frac{y}{k} \leq 0,6106 \\ 0,0000 \leq \frac{y}{k} \leq 0,3553 \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{Média Inicial} \begin{cases} x = a_{14} \frac{1}{\left(\frac{y}{k}\right)^{5,7393}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - \left(\frac{y}{k}\right)^{1,6825} \\ x = 1 - a_{34} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,5462} \\ x = 1 - a_{44} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,2577} \end{cases} \text{ Para } \begin{cases} 0,8428 \leq \frac{y}{k} \leq 1,0493 \\ 0,6623 \leq \frac{y}{k} \leq 0,8428 \\ 0,4230 \leq \frac{y}{k} \leq 0,6623 \\ 0,0000 \leq \frac{y}{k} \leq 0,4230 \end{cases} \quad (23)$$

$$\text{Média Avançada} \left\{ \begin{array}{l} x = a_{14} \frac{1}{\left(\frac{y}{k}\right)^{2,9593}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - \left(\frac{y}{k}\right)^{1,7643} \\ x = 1 - a_{34} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,5505} \\ x = 1 - a_{44} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,1672} \end{array} \right. \text{Para} \left\{ \begin{array}{l} 0,8495 \leq \frac{y}{k} \leq 1,0600 \\ 0,6751 \leq \frac{y}{k} \leq 0,8495 \\ 0,4317 \leq \frac{y}{k} \leq 0,6751 \\ 0,0000 \leq \frac{y}{k} \leq 0,4317 \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\text{Madura} \left\{ \begin{array}{l} x = a_{14} \frac{1}{\left(\frac{y}{k}\right)^{2,8619}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - \left(\frac{y}{k}\right)^{1,8391} \\ x = 1 - a_{34} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,8222} \\ x = 1 - a_{44} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,1734} \end{array} \right. \text{Para} \left\{ \begin{array}{l} 0,8552 \leq \frac{y}{k} \leq 1,0718 \\ 0,6860 \leq \frac{y}{k} \leq 0,8552 \\ 0,4689 \leq \frac{y}{k} \leq 0,6860 \\ 0,0000 \leq \frac{y}{k} \leq 0,4689 \end{array} \right. \quad (25)$$

As constantes resultantes das equações 21 a 25 estão apresentadas na Tabela 5.

Tabela 5. Constantes resultantes das equações 21 a 25.

Geral	$a_{14} = \frac{a_{13}^{3,3833}}{b} = 0,2963$	$a_{34} = \frac{1}{a_{33}^{1,5236}} = 0,9504$	$a_{44} = \frac{1}{a_{43}^{1,2286}} = 0,7339$
Jovem	$a_{14} = \frac{a_{13}^{2,7423}}{b} = 0,3441$	$a_{34} = \frac{1}{a_{33}^{1,2803}} = 0,9403$	$a_{44} = \frac{1}{a_{43}^{1,3201}} = 0,9788$
Média Inicial	$a_{14} = \frac{a_{13}^{5,7393}}{b} = 0,1640$	$a_{34} = \frac{1}{a_{33}^{1,5462}} = 0,9454$	$a_{44} = \frac{1}{a_{43}^{1,2577}} = 0,7376$
Média Avançada	$a_{14} = \frac{a_{13}^{2,9593}}{b} = 0,3629$	$a_{34} = \frac{1}{a_{33}^{1,5505}} = 0,9194$	$a_{44} = \frac{1}{a_{43}^{1,1672}} = 0,6663$
Madura	$a_{14} = \frac{a_{13}^{2,8619}}{b} = 0,3627$	$a_{34} = \frac{1}{a_{33}^{1,8222}} = 0,9936$	$a_{44} = \frac{1}{a_{43}^{1,1734}} = 0,6079$

As funções 21 a 25 são aplicáveis quando se conhece previamente o valor de “k”, o qual depende do valor do diâmetro à altura do peito e da altura de cada árvore, para que a variável $\frac{y}{k}$ possa ser introduzida nas equações.

Aplicações das funções de Preussner

As funções propostas por Preussner e ajustadas no presente trabalho podem ser utilizadas para diversos fins, tais como: determinar o comprimento da tora para um dado diâmetro no topo, estimar o diâmetro da tora para uma dada altura, calcular o volume total ou em um determinado intervalo.

Uma série de quesitos podem ser propostos e respondidos. Entretanto, em função do objetivo do presente trabalho será somente apresentado o cálculo do volume, que no caso, pode ser obtido pela integração das funções. O volume, quando combinado com a densidade básica pode gerar estimativas do estoque de biomassa e, quando com o poder calorífico, do estoque energético.

Em se tratando de uma função relativa, a integração poderá ser efetuada no intervalo de variação da variável relativa “x” ou efetuada no intervalo de variação $0 \leq x \leq 1$. Como as funções com a variável “y” resulta em diâmetro, então a integração para ser obtida em volume, será necessário multiplicá-la por $\frac{\pi}{4}$ para obter a área do círculo, pela altura (h) para ter o volume do sólido (v) e tomá-la para “y²”, pois para o cálculo da área, o diâmetro é tomado ao quadrado (Equação 26).

$$v = \frac{\pi}{4} h \int_0^1 y^2 dx \quad (26)$$

Então, tomando-se as funções para “y” (que descrevem o intervalo de zero a um), tem-se as equações de 27 a 31.

$$\text{Geral } v = \frac{\pi}{4} h \left[\int_0^{0,25} a_{13} k^2 \frac{1}{(1 + 4,3108x)^{0,5911}} dx + \int_{0,25}^{0,50} k^2 (1-x)^{1,2164} dx + \int_{0,50}^{0,75} a_{33} k^2 (1-x)^{1,3127} dx + \int_{0,75}^{1,0} a_{43} k^2 (1-x)^{1,6279} dx \right] \quad (27)$$

$$\text{Jovem } v = \frac{\pi}{4} h \left[\int_0^{0,25} a_{13} k^2 \frac{1}{(1 + 3,8379x)^{0,7293}} dx + \int_{0,25}^{0,50} k^2 (1-x)^{1,4235} dx + \int_{0,50}^{0,75} a_{33} k^2 (1-x)^{1,5621} dx + \int_{0,75}^{1,0} a_{43} k^2 (1-x)^{1,5151} dx \right] \quad (28)$$

$$\text{Média Inicial } v = \frac{\pi}{4} h \left[\int_0^{0,25} a_{13} k^2 \frac{1}{(1 + 8,04x)^{0,3485}} dx + \int_{0,25}^{0,50} k^2 (1-x)^{1,1887} dx + \int_{0,50}^{0,75} a_{33} k^2 (1-x)^{1,2935} dx + \int_{0,75}^{1,0} a_{43} k^2 (1-x)^{1,5903} dx \right] \quad (29)$$

$$\text{Média Avançada } v = \frac{\pi}{4} h \left[\int_0^{0,25} a_{13} k^2 \frac{1}{(1 + 3,2744x)^{0,6758}} dx + \int_{0,25}^{0,50} k^2 (1-x)^{1,1336} dx + \int_{0,50}^{0,75} a_{33} k^2 (1-x)^{1,2899} dx + \int_{0,75}^{1,0} a_{43} k^2 (1-x)^{1,7135} dx \right] \quad (30)$$

$$\text{Madura } v = \frac{\pi}{4} h \left[\int_0^{0,25} a_{13} k^2 \frac{1}{(1 + 3,3622x)^{0,6988}} dx + \int_{0,25}^{0,50} k^2 (1-x)^{1,0875} dx + \int_{0,50}^{0,75} a_{33} k^2 (1-x)^{1,0976} dx + \int_{0,75}^{1,0} a_{43} k^2 (1-x)^{1,7045} dx \right] \quad (31)$$

A integração para as idades (Equações 32 a 36).

$$\text{Geral } v = \frac{\pi}{4} h k^2 \left[a_{13}^2 \frac{1}{b} 2,4456 (1 + bx)^{0,4089} \Big|_0^{0,25} 0,4512 (1-x)^{2,2164} \Big|_{0,25}^{0,50} a_{33}^2 0,4324 \right. \\ \left. (1-x)^{2,3127} \Big|_{0,50}^{0,75} a_{43}^2 0,3805 (1-x)^{2,6279} \Big|_{0,75}^{1,0} \right] \quad (32)$$

$$\text{Jovem } v = \frac{\pi}{4} h k^2 \left[a_{13}^2 \frac{1}{b} 3,6941 (1 + bx)^{0,2707} \Big|_0^{0,25} 0,4126 (1-x)^{2,4235} \Big|_{0,25}^{0,50} a_{33}^2 0,3903 \right. \\ \left. (1-x)^{2,5621} \Big|_{0,50}^{0,75} a_{43}^2 0,3976 (1-x)^{2,5151} \Big|_{0,75}^{1,0} \right] \quad (33)$$

$$\text{Média Inicial } v = \frac{\pi}{4} h k^2 \left[a_{13}^2 \frac{1}{b} 1,5349 (1 + bx)^{0,6515} \Big|_0^{0,25} 0,4569 (1-x)^{2,1887} \Big|_{0,25}^{0,50} a_{33}^2 0,4360 \right. \\ \left. (1-x)^{2,2935} \Big|_{0,50}^{0,75} a_{43}^2 0,3861 (1-x)^{2,5903} \Big|_{0,75}^{1,0} \right] \quad (34)$$

$$\text{Média Avançada } v = \frac{\pi}{4} h k^2 \left[a_{13}^2 \frac{1}{b} 3,0845 (1 + bx)^{0,3242} \Big|_0^{0,25} 0,4687 (1-x)^{2,1336} \Big|_{0,25}^{0,50} a_{33}^2 0,4367 \right. \\ \left. (1-x)^{2,2899} \Big|_{0,50}^{0,75} a_{43}^2 0,3685 (1-x)^{2,7135} \Big|_{0,75}^{1,0} \right] \quad (35)$$

$$\text{Madura } v = \frac{\pi}{4} h k^2 \left[a_{13}^2 \frac{1}{b} 3,3201 (1 + bx)^{0,3012} \Big|_0^{0,25} 0,4790 (1-x)^{2,0875} \Big|_{0,25}^{0,50} a_{33}^2 0,4767 \right. \\ \left. (1-x)^{2,0976} \Big|_{0,50}^{0,75} a_{43}^2 0,3698 (1-x)^{2,7045} \Big|_{0,75}^{1,0} \right] \quad (36)$$

A partir das integrais obtidas anteriormente é possível estimar o volume total ou o volume parcial para um determinado intervalo desejado. Deve-se considerar que as integrações são efetuadas considerando que as partes se integram com a inversão dos valores, dado que a curva se comporta de forma decrescente da base para o ápice. Para exemplificar o processo estimativo do volume, suponha-se que seja tomada uma árvore, na idade madura, cujo diâmetro à altura do peito é de 14,32 cm e a altura total seja de 18,7 m.

Primeiramente, calcula-se o valor de k. Como $\frac{1,3}{18,7} = 0,07$, sendo então $0,07 \leq 0,25$, ou seja, localizado no primeiro segmento, então aplicando-se a fórmula apropriada tem-se (Equação 37);

$$k = 14,32 \left(1 + 3,3622 \frac{1,3}{18,7} \right)^{0,3494} = 15,41 \text{ cm.} \quad (37)$$

Usando-se k em metros, o volume da árvore pode ser facilmente determinado pela Equação 38.

$$v = \frac{\pi}{4} (18,7) (0,1541)^2 \left[1,0718^2 \frac{1}{3,3622} 3,3201 (1 + 3,3622x)^{0,3012} \Big|_0^{0,25} + 0,4790 (1 - x)^{2,0875} \Big|_{0,50}^{0,25} 1,0035^2 + 0,4767 (1 - x)^{2,0976} \Big|_{0,50}^{0,75} + 1,5283^2 0,3698 (1 - x)^{2,7045} \Big|_{0,75}^{1,0} \right] \quad (38)$$

$$v = 0,34877(0,22882 + 0,15004 + 0,08595 + 0,02033)$$

$$v = 0,34877 (0,48514)$$

$$v = 0,16922 \text{ m}^3$$

A árvore selecionada tem 0,1692 m³ de volume com casca.

Deve-se observar, que após a integração pode-se efetuar o cálculo do volume total de qualquer árvore pela equação resultante, portanto, $v = \frac{\pi}{4} k^2 h^2 (0,48514)$, em que o fator 0,48514 é o fator de forma natural de Hohenadl médio na referência d_{0,5h}.

No caso do interesse da estimativa do volume em um intervalo especificado, o procedimento do cálculo integral será o mesmo que o apresentado anteriormente, apenas que a integração será efetivada no intervalo definido para a variável "x", ou x₁ ≤ x ≤ x₂. Assim, $v_{x_1 x_2} = \frac{\pi}{4} h \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$.

Suponha-se que da mesma árvore escolhida anteriormente se deseja saber o volume de madeira entre as secções 0 a 25%, 25 a 50%, 50 a 75% e 75 a 100% da altura total. Sendo assim, tem-se que:

$$v_{x_0 x_{0,25}} = \frac{\pi}{4} (18,7)(0,1541)^2 \left[1,0718^2 \frac{1}{3,3622} 3,3201 (1 + 3,3622x)^{0,3012} \Big|_0^{0,25} \right] = 0,07981 \text{ m}^3$$

$$v_{x_{0,25} x_{0,50}} = \frac{\pi}{4} (18,7)(0,1541)^2 \left[0,4790 (1-x)^{2,0875} \Big|_{0,50}^{0,25} \right] = 0,05233 \text{ m}^3$$

$$v_{x_{0,50} x_{0,75}} = \frac{\pi}{4} (18,7)(0,1541)^2 \left[1,0035^2 0,4767 (1-x)^{2,0976} \Big|_{0,50}^{0,75} \right] = 0,02998 \text{ m}^3$$

$$v_{x_{0,75} x_{1,0}} = \frac{\pi}{4} (18,7)(0,1541)^2 \left[+1,5283^2 0,3698 (1-x)^{2,7045} \Big|_{0,75}^{1,0} \right] = 0,00709 \text{ m}^3$$

O fator de forma natural de Hohenadl médio para o grupo geral foi de 0,46068. Na idade jovem foi de 0,43704, na idade média inicial 0,45735, na média avançada 0,46971 e na idade madura 0,48514. Assim, é possível constatar que o fator de forma das árvores de acácia-negra segue a tendência de aumento com a idade. Martins et al. (2017) também constatou que há alteração na forma das árvores com o avanço da idade.

Qualidade das funções de Preussner

O modelo proposto por Preussner gerou estatísticas favoráveis para todos os grupos de idade avaliados (Tabela 6). As melhores estatísticas de ajuste do modelo foram constatadas para as árvores em idade avançada e as piores para aquelas em idade jovem. Martins et al. (2017), analisando curvas de afilamento para *Araucaria angustifolia*, constataram uma melhoria da forma com o aumento da idade. Friedl (1989), estudando a dinâmica da forma do

fuste de árvores de *Araucaria angustifolia*, encontrou resultados em que a precisão do ajuste apresentou uma leve tendência de melhoria com a idade, devido uma melhor distribuição dos pontos amostrados com aumento da altura da árvore e mudança na forma das árvores.

Tabela 6: Indicadores estatísticos do ajuste dos modelos de Preussner para cada grupo de idade.

Idade	Número de observações	r	RSME	CV
Geral	671	0,9958	18,58	100,89
Jovem	185	0,9863	23,67	93,45
Média Inicial	163	0,9909	16,92	66,59
Média Avançada	153	0,9943	16,44	61,46
Madura	170	0,9930	9,48	65,21

Em que: r é o coeficiente de correlação entre os valores observados e estimados, RSME é a raiz quadrada do erro médio em percentagem e CV é o coeficiente de variação em percentagem.

O coeficiente de correlação (r) entre os valores observados e estimados foi maior que 0,98 para todos os grupos de idade. Trabalhando com a mesma base de dados Schikowski (2016) testou funções de afilamento e técnicas de aprendizado de máquinas para a estimativa do volume e, também, encontrou coeficientes de correlação superior a 0,98.

O maior RSME% foi de 23,67% para o grupo que contém árvores em idade jovem, já o menor valor foi identificado para as árvores em idade madura, 9,48 respectivamente. Schikowski (2016) encontrou RSME% na ordem de 10,4% ao ajustar o polinômio de Hradetzky, 10,05% para algoritmo do k-vizinho mais próximo e 9,31% utilizando redes neurais artificiais, para a mesma base de dados.

O coeficiente de variação foi maior para o grupo geral em que todas as idades estão reunidas. O menor valor foi constatado na idade madura, sendo em torno de 65,21%, muito próximo do encontrado por Behling et al. (2020), que foi 65,64%, ao ajustar modelos de afilamento e volume do fuste para árvores do mesmo conjunto em idade madura.

O volume estimado pelas equações de Preussner apresentam variação semelhante de dados de volumes observados para todas as idades (Figura 2). Foi constatado que há tendência de superestimar o volume das árvores que têm os maiores DAPs, para todos os grupos de idade.

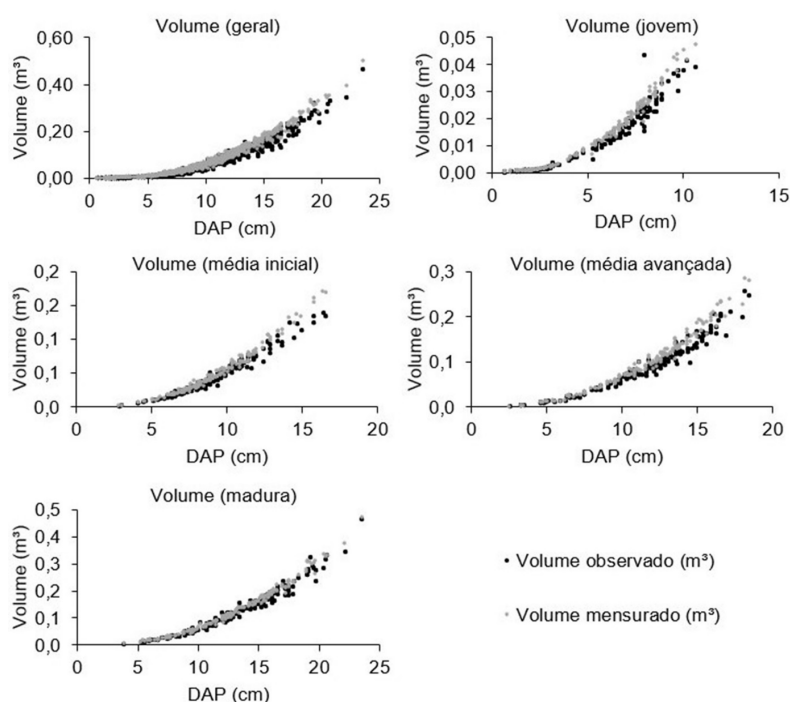


Figura 2: Volume observado versus volume estimado para os diferentes grupos de idade avaliados.

Para a mesma base de dados, as estatísticas de ajuste mostraram que o modelo proposto por Preussner aproximou-se muito de técnicas sofisticadas de inteligência artificial e de modelos tradicionais de funções de afilamento. As funções de afilamento normalmente utilizadas são ajustadas por meio de análise de regressão, o que resulta em variáveis auto-correlacionadas, como é o caso dos diâmetros, o que invalida os testes de hipótese. Já o ajuste da função do Preussner simula coeficientes entre 0 e 1, ou seja, não há a necessidade de atender a tais condicionantes. As funções de Preussner quando utilizadas para afilamento de fustes mostram compatibilidade do volume das partes com o volume do todo, o que não acontece nas demais equações de afilamento.

Péllico Netto (1994), trabalhando com *Araucária angustifolia* já havia constatado que as funções propostas por Preussner são precisas e de fácil utilização. Mais recentemente Stefanello et al. (2021), avaliando plantações comerciais de *Pinus taeda* L. constatou que as funções de Preussner foram adequadas e precisas para estimar os volumes totais e por sortimentos, apresentando vantagens como funções flexíveis, cálculo simples e flexibilidade para a interpretação dos coeficientes.

Exemplo de aplicações práticas

Serpe et al. (2018) constataram, a partir de pesquisa na literatura, que a frequência de tocos com altura maior que a especificada na colheita varia de 13% a 58,8%. Analisando estas informações e utilizando as funções de Preussner foi calculado o volume de toco de árvores em plantios maduros. Para tanto, foram simuladas 5 diferentes alturas de corte, sendo elas a 5, 10, 15, 20, 25 centímetros acima do solo.

Considerando que o volume presente nos tocos pudesse ser utilizado para a geração de energia, foi estimado o estoque energético para cada altura de corte. Os valores de densidade básica foram utilizados para estimar a biomassa correspondente e os de poder calorífico superior para estimar o estoque energético (Figura 3).

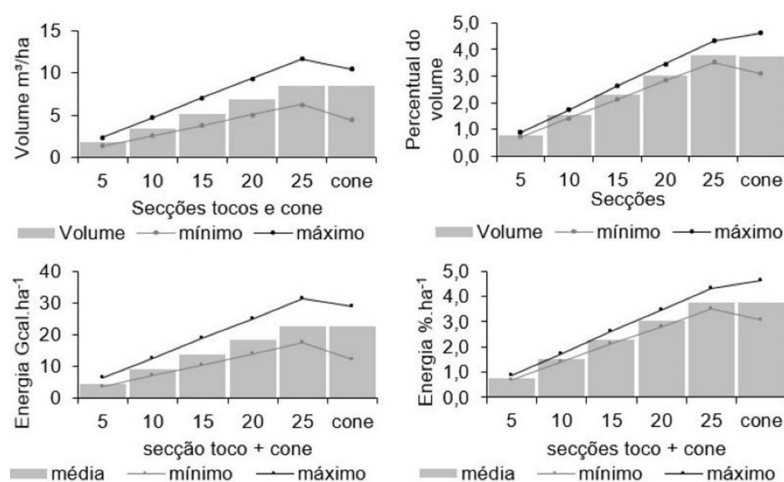


Figura 3: Volume e estoque de energia simulados para diferentes alturas de toco e ponteira (cone) das árvores de acácia-negra em idade madura.

Simulando uma colheita em que a altura de corte é 20 centímetros acima do solo o volume em madeira que está sendo deixado na floresta pode ser maior que o volume da seção superior da árvore (75 a 100%). Se a altura de corte for maior que 25 centímetros um volume de aproximadamente 4% comparado ao total está sendo deixado em campo no toco. A biomassa da ponteira da árvore (biomassa acima de 75% da altura) também representa aproximadamente 4%. Dessa forma, aproximadamente 8% do volume total do fuste não é está sendo utilizado, sendo deixado em campo.

Do ponto de vista energético, a ponteira do fuste representa 4% do estoque energético total do fuste, a secção de um toco com 20 cm de altura 3% e uma secção de toco com 25 cm de altura representa aproximadamente 4%. Aproximadamente 8% da energia contida no fuste pode estar sendo perdida.

Além do percentual de biomassa e ou energia deixada em campo, uma colheita em que a maior altura de corte causa dificuldades para as atividades relacionadas ao replantio dos povoamentos. Entretanto, para recomendar a melhor altura de corte a ser adotada, estudos mais aprofundados se fazem necessários. Pesquisas que envolvam variáveis, como desgaste de equipamento, custos operacionais, retorno financeiro, qualidade da biomassa, entre outros são relevantes para tal fim.

CONCLUSÕES

O modelo de Preussner apresentou um bom ajuste, podendo ser utilizado para modelar a forma das árvores, bem como estimar o volume total ou parcial em árvores de acácia-negra.

O modelo proposto por Preussner aproximou-se de técnicas sofisticadas de inteligência artificial e de modelos tradicionais de funções de afilamento, entretanto, com as funções de Preussner há compatibilidade do volume das partes com o volume do todo, o que não acontece nas demais equações de afilamento.

O modelo tende a superestimar o volume das árvores que têm os maiores DAPs, para todos os grupos de idade.

Para estimar o volume de diferentes secções do fuste, a exemplo do toco e ponteira do fuste o modelo se mostrou apropriado, flexível e de fácil aplicação.

Dependendo da altura de corte, o volume de madeira presente no toco a biomassa e o estoque energético podem representar um volume considerável, alcançando quase 10% do volume, biomassa e estoque energético do fuste.

AGRADECIMENTOS

A empresa TANAC S.A. pela disponibilização do material para estudos, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento e Pesquisa (CNPQ) pela concessão de bolsas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ahrens, S., & Holbert, D. (1981). Uma função para forma de tronco e volume de *Pinus taeda* L. *Boletim de Pesquisa Florestal*, 3, 37-68.
- American Society for Testing Materials – ASTM International. (2014). *ASTM D2395-14: standard test methods for specific gravity of wood and wood-based materials*. West Conshohocken: ASTM International.
- American Society for Testing Materials – ASTM International. (2013). *ASTM D5865-13: standard test method for gross calorific value of coal and coke*. West Conshohocken: ASTM International.
- Assis, A. L. (2000). *Avaliação de modelos polinomiais segmentados e não segmentados na estimativa de diâmetros e volumes comerciais de Pinus taeda* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Lavras, Lavras.
- Behling, M., Koehler, H. S., & Behling, A. (2020). Compatibility between the stem volume and taper equations volume for black wattle trees. *Floresta*, 50(3), 1518-1526. <http://dx.doi.org/10.5380/rf.v50i3.63881>.
- Cao, Q. V., Burkhart, H. E., & Max, T. A. (1980). Evaluation of two methods for cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *Forest Science*, 26(1), 71-80.
- Demaerschalk, J. P., & Kozak, A. (1977). The hole-bole system: a conditional dual equation system for precise prediction of tree profiles. *Canadian Journal of Forest Research*, 7(3), 488-497. <http://dx.doi.org/10.1139/x77-063>.
- Friedl, R. A. (1989). *Dinâmica e prognose da forma dos fustes em povoamentos plantados de Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Ktze. (Dissertação de mestrado). Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- Hohenadl, W. (1924). Der Aufbau der Baumschäfte. *Forstwissenschaftliches Centralblatt*, 46, 192409.

- Li, R., Weiskittel, A., Dick, A. R., Kershaw Junior, J. A., & Seymour, R. S. (2012). Regional stem taper equations for eleven conifer species in the Acadian region of North America: development and assessment. *Northern Journal of Applied Forestry*, 29(1), 5-14. <http://dx.doi.org/10.5849/njaf.10-037>.
- Martins, A. P. M., Machado, S. A., Figueiredo Filho, A., Corte, A. P. D., & Gorenstein, M. R. (2017). Efeito da idade na forma do fuste de *Araucaria angustifolia* na região centro-sul do Paraná. *Pesquisa Florestal Brasileira*, 37(90), 109-117. <http://dx.doi.org/10.4336/2017.pfb.37.90.1329>.
- Max, T. A., & Burkhart, H. E. (1976). Segmented polynomial regression applied to taper equations. *Forest Science*, 22(3), 283-289.
- Péllico Netto, S. (1994). As curvas relativas contínuas de forma de Preussner para o sortimento dos fustes de espécies florestais. *Cerne*, 1(1), 17-27.
- Preussner, K. (1974). Eine neue Schaftkurvengleichung und ihre Anwendung. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Universität Dresden*, 23(11), 305-309.
- Schikowski, A. B. (2016). *Estimativa do volume e da forma do fuste utilizando técnicas de aprendizado de máquina* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- Scotti, R., Mura, M., Piredda, I., Campus, S., & Lovreglio, R. (2014, Novembro 26-29). Gestione forestale sostenibile in Sardegna: dal legno al legname, le funzioni di profilo. In O. Ciancio (Ed.), *Proceedings of the Second International Congress of Silviculture* (pp. 1056-1061). Florença, Itália: Accademia Italiana di Scienze Forestali.
- Serpe, E. L., Figueiredo Filho, A., & Arce, J. E. (2018). Perdas volumétricas relativas à colheita florestal e seus reflexos econômicos. *Biofix Scientific Journal*, 3(1), 172-176. <http://dx.doi.org/10.5380/biofix.v3i1.58054>.
- Souza, C. A. M., Finger, C. A. G., Schneider, P. R., & Muller, I. (2016). Modelos de afilamento para *Pinus taeda* L. baseados em pontos de mudança de forma. *Ciência Florestal*, 26(4), 1239-1246. <http://dx.doi.org/10.5902/1980509825120>.
- Stefanello, F. R., Péllico Netto, S., Behling, A., Pelissari, A. L., & Orso, G. A. (2021). Preussner functions for volume estimation of *Pinus taeda* L. in southern Brazil. *New Zealand Journal of Forestry Science*, 51(4), 1-25. <http://dx.doi.org/10.33494/nzjfs512021x66x>.
- Trincado, G., & Burkhart, H. E. (2006). A generalised approach for modeling and localizing stem profile curves. *Forest Science*, 52(6), 670-682.

Contribuição dos Autores: SCJ: Investigação, Recursos, Software Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição; SPN: Conceituação, Administração do Projeto, Supervisão, Validação; AB: Curadoria de Dados, Análise Formal, Supervisão.